A 55-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Deva, 5 aprilie 2004

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ştiind că, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi orice $n \in \mathbf{N}^*$, are loc relaţia:

$$n^2 \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t = nf(x) + \frac{1}{2}.$$

Subiectul 2. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$. Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, definim $f_n : \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}_n$, prin $f_n(\widehat{x}) = \widehat{f(x)}$, pentru orice $x \in \mathbf{Z}$.

a) Să se arate că f_n este bine definită.

b) Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbf{Z}[X]$ cu proprietatea că, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, funcţia f_n este surjectivă.

Subiectul 3. Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă astfel încât

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Să se arate că

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 4.$$

Subiectul 4. Fie K un corp de caracteristică p, cu $p \equiv 1 \pmod 4$.

a) Să se arate că -1 este pătratul unui element din K.

b) Să se arate că orice element nenul din K se scrie ca suma a trei pătrate nenule ale unor elemente din K.

c) Rămâne, în general, această scriere adevărată pentru elementul nul din K?